Due espressioni numeriche che hanno lo stesso valore e sono separate dal segno di uguale, formano una uguaglianza numerica:

$$2 \cdot 3 - 1 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$5 = 5$$

Si possono scrivere nella stessa maniera uguaglianze letterali:

1) le identità

2) le equazioni

IDENTITA'

Una identità è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata qualsiasi siano i valori numerici attribuiti alle variabili che in essa figurano.
Le uguaglianze che traducono in termini matematici delle frasi vere sono soddisfatte PER QUALSIASI VALORE e si chiamano IDENTITÀ.

ESEMPIO: $x + x = 2x$ **è vera per qualsiasi valore della x** $(\forall x \in \Re)$

infatti:

se x = 1 $1+1=2\cdot(1)$

$2=2$

se x = 7 $7+7=2\cdot(7)$

$14=14$

se x = -3 $(-3)+(-3)=2\cdot(-3)$

$-6=-6$

se x = 3/4 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=2\cdot\frac{3}{4}$

$\frac{6}{4}=\frac{6}{4}$

e così via ...

EQUAZIONI

Una equazione è una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata solamente per particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.

Esempio: $x + 3 = 7$ *è vera solo per x = 4*

Si chiamano radici o soluzioni dell'equazione i particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano.

Due equazioni sono equivalenti quando hanno la stessa radice.

Risolvere un'equazione significa esplicitare l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione.

incognite **termini noti**

$$\underbrace{7x^2 - 3}_{\text{I membro}} = \underbrace{5x + 2}_{\text{II membro}}$$

Una equazione è detta intera se l'incognita non figura al denominatore.
Una equazione è detta fratta se l'incognita figura anche, o solo, al denominatore.

$7x^2 - 3 = 5x + 2$ **e** $\dfrac{3x-2}{2+4} = 4x - 2$ **sono intere**

$\dfrac{3}{2x+4} = 4x - 2$ **è frazionaria**

Il grado di una equazione è dato dal grado massimo dell'incognita presente nell'equazione.
Il grado di una equazione è pari al numero delle possibili soluzioni dell'equazione stessa.

$7x^2 - 3 = 5x + 2$ **grado dell'equazione: 2 (equazione di secondo grado)**

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Per RISOLVERE una equazione è opportuno trasformarla in una più semplice ma EQUIVALENTE

Ricordiamo che:

Due equazioni sono equivalenti quando hanno le stesse radici.

Es.: $3x + 4 = 13$

e *(entrambe verificate per x=3)*

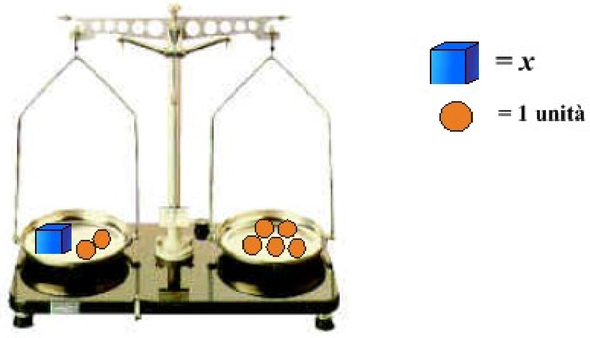
$5x = 15$

Vedremo come è possibile utilizzare i principi di equivalenza per trasformare le equazioni.

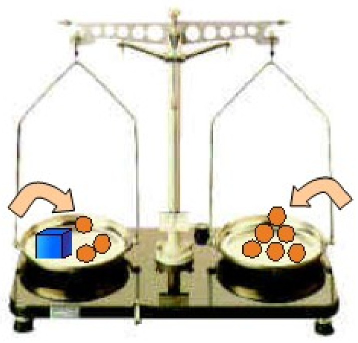
I PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

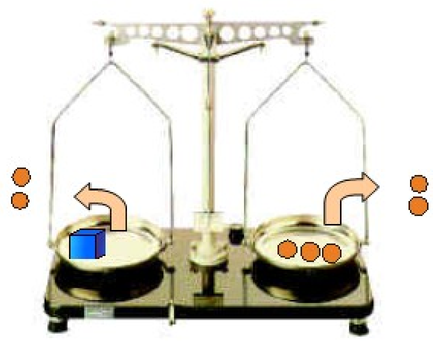
Aggiungendo ad entrambi i membri di una equazione lo stesso valore numerico o la stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente a quella data.

Es.: $x + 2 = 5$



se aggiungo o tolgo ad ambo i membri (o ai due piatti della bilancia) una stessa quantità ...





cioè:

$x + 2 + 1 = 5 + 1$

$x + 3 = 6$

cioè:

$x + 2 - 2 = 5 - 2$

$x = 3$

... ottengo delle equazioni equivalenti a quella data !!
(nel nostro caso equivalenti a: x + 2 = 5)

Da tale principio derivano le seguenti due regole:

1) Se uno stesso termine figura in entrambi i membri di un'equazione può essere soppresso.

Es.: $4x + \cancel{5} = 3 + x + \cancel{5}$

infatti, applicando il I principio e aggiungendo, ad ambo i membri, -5:

$$4x + \underbrace{5 - 5} = 3 + x + \underbrace{5 - 5}$$

otterrei: $4x = 3 + x$

2) Si può trasportare un termine di un'equazione da un membro all'altro purché gli si cambi il segno (legge del trasporto).

Es.: $4x = 3 + x \longrightarrow 4x - x = 3$

infatti, applicando il I principio e aggiungendo, ad ambo i membri, -x:

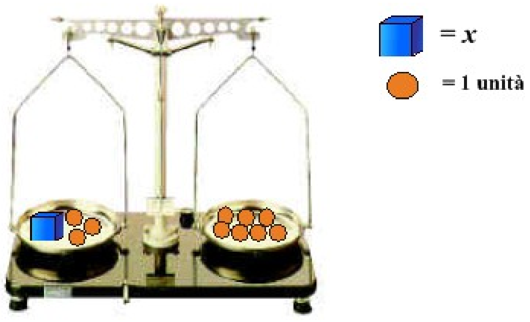
$$4x - x = 3 + x - x$$

otterrei: $4x - x = 3$

N.B.: la legge del trasporto si utilizza per trasportare tutte le incognite al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro.

Esercitiamoci un pò insieme ...

1) $x + 3 = 7$

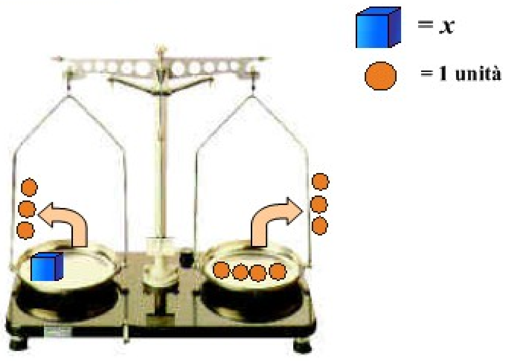


applico il I principio di equivalenza sottraendo 3 ad ambo i membri:

$$x + 3 - 3 = 7 - 3$$

otterrò allora:

$$x = 4$$



Verifichiamo se il risultato trovato è soluzione dell'equazione, ovvero se essa è verificata:

$x + 3 = 7$ **per** $x = 4$

$4 + 3 = 7$

$7 = 7$ ***l'equazione risulta verificata !!***

---

2) $4x - 2 = 3x + 3$

per la regola del trasporto posso trasferire le incognite al primo membro e i termini noti al secondo membro (cambiandone il segno!):

$$4x - 3x = 3 + 2$$

da cui:

$$x = 5$$

verifichiamo se questa è la soluzione dell'equazione:

$4x - 2 = 3x + 3$ **per** $x = 5$

$4 \cdot 5 - 2 = 3 \cdot 5 + 3$

$20 - 2 = 15 + 3$

$18 = 18$ ***l'equazione risulta verificata !!***

---

3) $2x \underline{- 7} = x + 2 \underline{- 7}$

per la prima regola (soppressione dei termini uguali) posso eliminare i due termini uguali presenti nei membri:

$$2x = x + 2$$

quindi "trasporto" le incognite al primo membro (cambiandone il segno!):

$$2x - x = 2$$

da cui:

$$x = 2$$

Adesso provate da soli ...

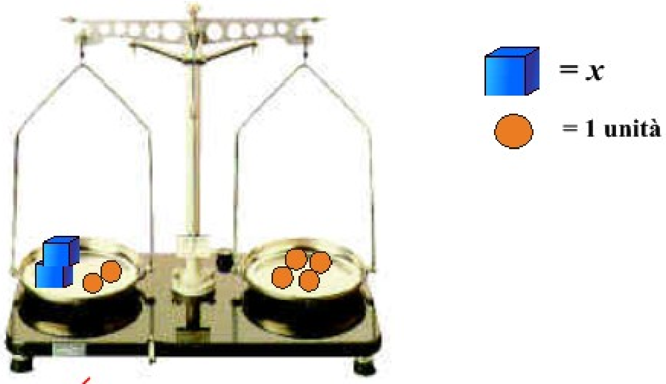
... risolvete le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza e verificate la soluzione ottenuta.

1) $x + 4 = 5$
2) $x - 8 = 22$
3) $x + 6 = -1$
4) $-2 + x = 1$
5) $12 + x = -11$
6) $11 + x + 1 = 16 - 3$
7) $6x + 4 = 5x - 1$
8) $16 + x = -10$
9) $x + 3 = 12 + 6$
10) $8 + x - 4 = 2 - 1$
11) $12 + x = -24$
12) $x - 27 = -15$
13) $-3 + x = -6$
14) $11 - x = 4 - 2x$
15) $9 - x = 1 - 2x$
16) $18 - 19x = 10 - 20x$
17) $14x + 6 = 13x - 1$
18) $28 + 5x = 4x + 2$
19) $6 - 12x + x = -12x - 5$

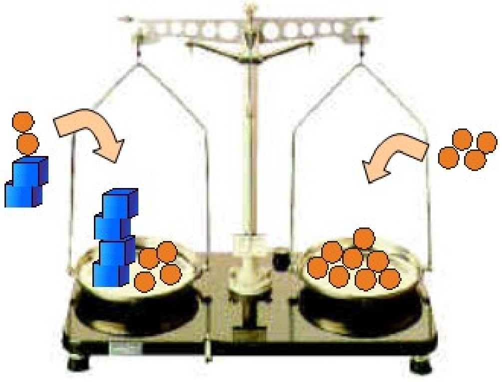
II PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

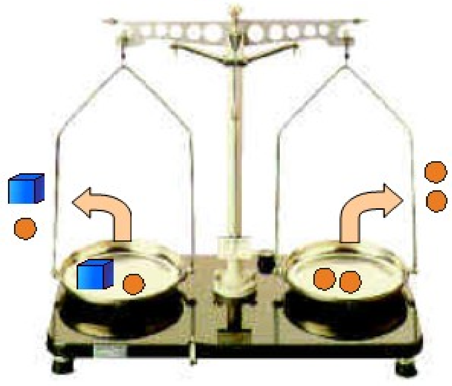
"Moltiplicando o dividendo entrambi i termini di un'equazione per uno stesso numero (diverso da zero) si ottiene un'equazione equivalente a quella data."

Es.: $2x + 2 = 4$



moltiplico per 2 **divido per 2**





cioè: $(2x+2)\cdot 2 = 4\cdot 2$

$4x+4=8$

cioè: $(2x+2):2=4:2$

$x+1=2$

... ottengo delle equazioni equivalenti a quella data: la soluzione di entrambe le equazioni è x = 1

Dal secondo principio derivano le seguenti due regole:

3) In un'equazione, se si cambia il segno di tutti i termini, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Infatti:

Consideriamo l'equazione:
- x + 4 = + 6
applichiamo il 2° princ. di equivalenza moltiplicando entrambi i membri per -1:

$(-x+4)\cdot(-1)=+6\cdot(-1)$

otterrò:

$+x-4=-6$

ovvero, tutti i membri dell'equazione hanno segno cambiato.

4) In un'equazione, se si moltiplicano entrambi i membri per il denominatore comune delle frazioni che in essi compaiono, si ottiene un'equazione equivalente alla data.

Consideriamo l'equazione:

$$\frac{3}{5}x+\frac{11}{2}=+\frac{3}{10}$$

riconduciamo le frazioni ad un unico denominatore: mcd(2, 5, 10) = 10

$$\frac{6x+55}{10}=+\frac{3}{10}$$

applichiamo il 2° principio moltiplicando entrambi i membri per +10:

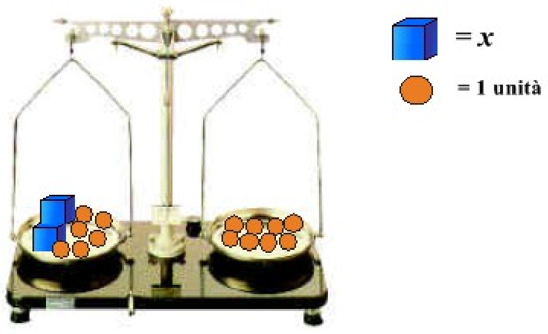
$$(+\overset{1}{\cancel{10}})\cdot\frac{6x+55}{\underset{1}{\cancel{10}}}=\left(+\frac{3}{\underset{1}{\cancel{10}}}\right)\cdot(+\overset{1}{\cancel{10}})$$

da cui:

$6x+55=+3$

Esercitiamoci un pò insieme ...

1) $2x + 6 = 8$

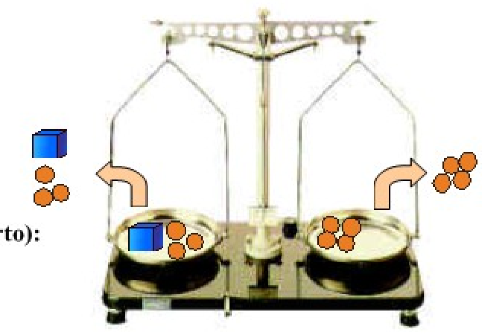


applico il II principio di equivalenza dividendo per 2 ambo i membri:

cioè:

$$(2x+6):2 = 8:2$$

$$x+3=4$$



applico adesso il I principio (legge del trasporto):

$x = 4 - 3$

da cui:

$x = 1$

---

2) **Consideriamo l'equazione:**

$$\frac{7}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+2$$

riconduco allo stesso denominatore entrambi i membri; mcd(2, 3) = 6

$$\frac{21x+4}{6}=\frac{-2+12}{6}$$

applico il II principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per +6:

$$\overset{1}{\cancel{(+6)}}\cdot\frac{21x+4}{\underset{1}{\cancel{6}}}=\frac{-2+12}{\underset{1}{\cancel{6}}}\cdot\overset{1}{\cancel{(+6)}}$$

e ottengo:

$$21x+4=-2+12$$

applico il I principio di equivalenza, legge del trasporto:

$$21x=-2+12-4$$

sommando i termini noti ottengo:

$21x=+6$ ***che è un'equazione ridotta in "Forma Normale" cioè del tipo:*** $ax = b$

termine noto

coefficiente della x

la cui soluzione è:

$$x=+\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{7}{\cancel{21}}}=\frac{2}{7}$$

la sua soluzione è:

$$x=\frac{b}{a}=\frac{\textit{termine noto}}{\textit{coefficiente della } x}$$

verifichiamo la soluzione ottenuta:

$$\frac{7}{2}x+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+2 \qquad \textbf{per} \qquad x=\frac{2}{7}$$

sostituisco alla x:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{7}}}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+2$$

ottengo:

$$1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+2$$

somma algebrica ad ambo i membri:

$$\frac{3+2}{3}=\frac{-1+6}{3}$$

da cui:

$$\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$ ***l'equazione è verificata !!***

Adesso provate da soli ...

... risolvete le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza e verificate la soluzione ottenuta.

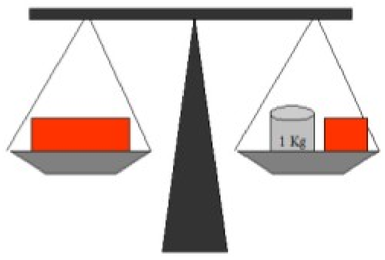
$8x = 16;$ $\quad 15x = 5;$ $\quad 22x = 2;$ $\quad 10x = -5$

$16x = -20;$ $\quad -11x + 3x = 4;$ $\quad -7x = 10 + 4;$

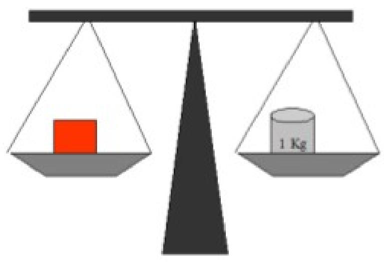
E ADESSO UN CLASSICO:

Un mattone pesa 1 Kg più mezzo mattone, quanto pesa un mattone?

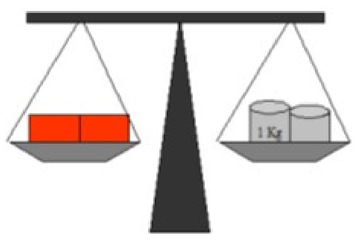
Utilizziamo in classe una bilancia a 2 braccia, quelle un po' vecchiotte!
Mettiamo inoltre sulla bilancia i dati del problema: il mattone, mezzo mattone e 1 Kg



Come farebbe la vecchina del mercato a sapere quanto pesa questo mattone? Io penso che procederebbe in questo modo:
Innanzitutto toglierebbe il mezzo mattone dal piatto di destra, ma perché la bilancia possa continuare ad essere in equilibrio, dovrebbe togliere mezzo mattone anche dal piatto di sinistra. In questo modo la vecchina ha utilizzato il primo principio di equivalenza! E si trova in questa condizione:



La vecchina ha scoperto che mezzo mattone pesa 1 Kg. Ora aggiunge al piatto di sinistra l'altro mezzo mattone, ma per mantenere l'equilibrio deve mettere sul piatto di destra 1 Kg, perché corrisponde al peso di mezzo mattone. Anche in questo caso la vecchina ha utilizzato senza saperlo il primo principio di equivalenza. In questo caso la vecchina poteva procedere anche in un altro modo, cioè raddoppiando la quantità che si trova in entrambi i piatti. Anche facendo così avrebbe ottenuto la seguente condizione:



La vecchina ha scoperto che un mattone pesa 2 kg.
Ora veniamo alla traduzione dall'italiano al nostro matematichese:
Poiché vogliamo conoscere il peso di un mattone, poniamo questa quantità uguale ad x.
E traducendo il testo del problema otteniamo la seguente espressione:

$$x = \frac{x}{2} + 1$$

Ricapitolando quello che ha fatto la vecchina, abbiamo visto che per mantenere l'equilibrio ha aggiunto o sottratto da ambo i piatti la stessa quantità.
In matematichese traduciamo questo dicendo:
"Aggiungendo o sottraendo da ambo i membri di un'uguaglianza la stessa quantità il risultato non cambia" (Primo principio di equivalenza)
Usando ora questa regola, nella nostra equazione, che altro non è che un'uguaglianza in cui compare un'incognita: la x, otteniamo
cioè

$$x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2}$$

Adesso procediamo come la vecchina, utilizzando però il secondo procedimento che è più veloce, cioè moltiplichiamo ambo i membri per 2

$$\frac{x}{2} = 1$$ ***In questo modo otteniamo: x=2***

Quest ultimo procedimento è chiamato in matematichese "secondo principio di equivalenza":
Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'uguaglianza per un numero diverso da zero, il risultato non cambia.
Se noi dimezziamo o dividiamo in tre parti le quantità che si trovano nei due diversi piatti, cioè dividiamo per un numero diverso da zero ambo i membri, comunque si mantiene l'equilibrio, cioè l'uguaglianza si mantiene.